26-11-20

Ασκήσεις:

2ο σετ ασκήσεις:

Πχ: i) $y^{(4)}+y=0$

$\Rightarrow P(\lambda)=\lambda^4+1=0$

$\Rightarrow (\lambda^2)^2+2\lambda^2-2\lambda^2+1=(\lambda^2+1^2)-(\sqrt{2}\lambda)^2=(\lambda^2+\sqrt{2}\lambda+1)(\lambda^2-\sqrt{2}\lambda+1)$

Επομένως, δύο ρίζες (τέσσερεις):

$\lambda_{1,2}=\frac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}$, $\lambda_{3,4}=\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}$

$y_1=e^{-(\sqrt{2}/2)t}\cdot\cos(\sqrt{2}/2\, t)$ $\quad$ $y_3=e^{(\sqrt{2}/2)t}\cdot\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t$

$y_2=e^{-(\sqrt{2}/2)t}\cdot\sin(\sqrt{2}/2\, t)$ $\quad$ $y_4=e^{(\sqrt{2}/2)t}\cdot\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t$

Πχ: Άσκηση B-24: Ας είναι t_1,t_2 διαδοχικές ρίζες της y_1, τότε $y_1(t_1)=y_1(t_2)$ και $y(t)\neq 0$, $\forall t\in(t_1,t_2)$, δνδ ύπαρξη ρίζας της y_2.

Λύση: Υποθέτουμε ότι η y_2 δεν έχει ρίζα στο (t_1,t_2).

Παρατηρούμε ότι $y_2(t_2)\neq 0$, $y_2(t_1)\neq 0$.

(αν $y_2(t_2)=0$ ή $y_2(t_1)=0 \Rightarrow W(y_1,y_2)(t_1)=0$ άτοπο αφού y_1,y_2 γρ. ανεξ)

$\Rightarrow y_2(t)\neq 0$, $t\in[t_1,t_2]$

Θεωρώ τη συνάρτηση $u(t)=\frac{y_1(t)}{y_2(t)} \rightsquigarrow u(t_1)=0=u(t_2)$, u παρ/μη στο (t_1,t_2) $\Big\} \Rightarrow$

$\xRightarrow{\text{Θ. Rolle}} \exists\, \xi\in(t_1,t_2): u'(\xi)=0 \Rightarrow \frac{y_1'(t)y_2(t)-y_1(t)y_2'(t)}{y_2^2(t)}=0$, $t=\xi$

$\hookrightarrow$ = ορίζουσα Wronski

$\Longrightarrow W(y_1,y_2)(\xi)=0 \Longrightarrow$ άτοπο

(*) μονοσήμαντο: Υποθέτουμε ότι $\exists\,\xi_1,\xi_2\in(t_1,t_2): y_2(\xi_1)=0=y_2(\xi_2)$

και ότι οι ξ_1, ξ_2 είναι διαδοχικές $\Rightarrow$

αν δεν υπήρχαν διαδοχικές θα μηδενίζονταν παντού η y_2 που θα ήταν άτοπο.

$\Rightarrow$ η y_1 έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (ξ_1, ξ_2) δηλαδή η y_1 έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (t_1, t_2) άτοπο. $\subseteq (t_1, t_2)$

Άσκηση Β-95: $y'' + ay = 0$, $a \in C(I)$.

Λύση: Έστω y λύση στο I.

Υποθέτουμε ότι $\exists (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $t_0 \in I$ με $t_n \to t^*$ και $\lim y(t_n) = 0 \Rightarrow y(t^*) = 0$ (I)

Από Θ. Rolle για την y στο $[t_n, t_{n+1}]$: $t^* > t_{n+1} > t_n$ χωρίς βλάβη της γεν.

$\Rightarrow \exists \xi_n \in (t_n, t_{n+1}) : y'(\xi_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$

Είναι $\xi_n \to t^*$ με $y'(\xi_n) = 0 \Rightarrow \lim y'(\xi_n) = 0 = y'(t^*) = 0$ (II)

γιατί $t_n < \xi_n < t_{n+1}$ (y' συνεχής στο t^*)

Από (I) και (II) έχουμε $y \equiv 0$, άτοπο.

Μη ομογενείς Γραμμικές Εξισώσεις:

Η γρ. εξίσωση $1^{ης}$ τάξης: $y'(t) + p(t)y(t) = q(t)$, $t \in I$ (E_1)

Θεώρημα (11): Η συνάρτηση y είναι μία λύση της γ.δ.ε. (E_1) αν-ν

$$y(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds}\left[y(t_0) + \int_{t_0}^{t} q(s)\cdot e^{\int_{t_0}^{s} p(u)du} ds\right] \quad t, t_0 \in I$$

n-τάξης: $y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0 y(t) = b(t)$, $t \in I$, $b, a_i \in C(I)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. (E_n)

Θεώρημα (12): Ας είναι y_μ μία μερική λύση της γ.δ.ε. (E_n). Τότε μία συνάρτηση y είναι μία λύση της γ.δ.ε. (E_n) αν-ν η συνάρτηση $z := y - y_\mu$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς γ.δ.ε. (E_n^2).

Απόδειξη: $L(z) = L(y - y_\mu) = L(y) - L(y_\mu) = b - b = 0$

Θεώρημα (13): (ΥΠΕΡΘΕΣΗ) Αν οι συναρτήσεις y_k, $k=1,\dots,m$ είναι λύσεις αντίστοιχα των γ.δ.ε. $y^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t)+\dots+a_0(t)y(t)=b_k(t)$ τότε η συνάρτηση $y(t)=y_1(t)+\dots+y_k(t)$ είναι μία λύση της γ.δ.ε. $y^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t)+\dots+a_1(t)y'(t)+a_0(t)y(t)=b_1(t)+\dots+b_m(t)$.

Απόδειξη: Είναι $L(y)=L(y_1+\dots+y_k)=L(y_1)+\dots+L(y_k)=b_1+\dots+b_m=b$

Πχ Αν y_1, y_2 είναι λύσεις των εξισώσεων
$y''+p(t)y(t)=t\cdot e^t$, $y''+y(t)p(t)=\cos t$, τότε η συνάρτηση $y=y_1+y_2$ είναι λύση της εξίσωσης $y''+p(t)=t\cdot e^t+\cos t=b(t)$.

Θεώρημα (14): Ας είναι $\{y_1,\dots,y_n\}$ ένα βασικό σύνολο λύσεων της ομογενούς γρ.δ.ε. (E_0) και ας είναι u_k, $k=1,\dots,n$, οι συναρτήσεις τ.ω.:

$$\begin{cases} u_1'y_1+u_2'y_2+\dots+u_n'y_n=0 \\ u_1'y_1'+u_2'y_2'+\dots+u_n'y_n'=0 \\ \vdots \\ u_1'y_1^{(n-2)}+u_2'y_2^{(n-2)}+\dots+u_n'y_n^{(n-2)}=0 \\ u_1'y_1^{(n-1)}+u_2'y_2^{(n-1)}+\dots+u_n'y_n^{(n-1)}=\dfrac{b}{a_n} \end{cases}$$

Τότε, $y_\mu=u_1y_1+\dots+u_ny_n$ είναι μία μερική λύση της ομογενούς γρ.δ.ε. (Ε).

Απόδειξη: Σελ. 87, Βιβλίο Φίλου.

Θεώρημα (15): Ας είναι x_0 ένα σημείο του I και $(y_1,\dots,y_n)$ ένα βασικό σύνολο λύσεων της ομογενούς γρ.δ.ε. (E_0).
Για κάθε $k\in\{1,\dots,n\}$, ας είναι $W_k(y_1,\dots,y_n)$ η ορίζουσα που προκύπτει απ' την $W(y_1,\dots,y_n)$ αν αντικατασταθεί η k-στήλη της με τη στήλη $(0,0,\dots,0,1)$. Τότε η συνάρτηση y_μ με

$$y_\mu(x)=\sum_{k=1}^{n} y_k(x)\int_{x_0}^{x}\frac{W_k(y_1,\dots,y_n)(t)}{W(y_1,\dots,y_n)(t)}\cdot\frac{b(t)}{a_n(t)}\,dt \quad, x\in I$$

είναι μία μερική λύση της ομογενούς γρ.δ.ε. (Ε).

Επιπλέον, η λύση αυτή πληροί τις αρχικές συνθήκες:
$y_\mu(x_0)=0,\ y_\mu'(x_0)=0, \ldots, y_\mu^{(n-1)}(x_0)=0.$

Πχ **Άσκηση 5 σελ.95:** $y'''-3y''+2y'=e^t$ (E).

Λύση: Θεωρώ την αντίστοιχη ομογενή: $y'''-3y''+2y=0$ (E_0)

$P(\lambda)=\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2-3\lambda+2)=0 \rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=2$

β.σ.λ. $=\{1, e^t, e^{2t}\}$

$$y_\mu(t)=\sum_{i=1}^{3} y_i(t)\int_0^t \frac{W_i(s)}{W(s)}\cdot\frac{e^s}{1}\,ds \quad , t\in\mathbb{R}$$

$$W(y_1,y_2,y_3)(t)=\begin{vmatrix} 1 & e^t & e^{2t} \\ 0 & e^t & 2\cdot e^{2t} \\ 0 & e^t & 4\cdot e^{2t}\end{vmatrix}=4e^{3t}-2e^{3t}=2\cdot e^{3t}$$

$$W_1(t)=\begin{vmatrix} 0 & e^t & e^{2t} \\ 0 & e^t & 2\cdot e^{2t} \\ 1 & e^t & 4\cdot e^{2t}\end{vmatrix}=2\cdot e^{3t}-e^{3t}=e^{3t}$$

$$W_2(t)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{2t} \\ 0 & 0 & 2\cdot e^{2t} \\ 0 & 1 & 4\cdot e^{2t}\end{vmatrix}=-2e^{2t}.$$

$$W_3(t)=\begin{vmatrix} 1 & e^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & e^t & 1\end{vmatrix}=e^t.$$

$$y_\mu(t)=1\cdot\int_0^t \frac{e^{3s}}{2e^{3s}}\cdot\frac{e^s}{1}ds+e^t\int_0^t\frac{-2\cdot e^{2s}}{2\cdot e^{3s}}\cdot\frac{e^s}{1}ds+e^{2t}\int_0^t\frac{e^s}{2\cdot e^{3s}}\cdot\frac{e^s}{1}ds=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t e^s ds-e^t\int_0^t 1\,ds+e^{2t}\int_0^t\frac{1}{2}e^{-s}ds=\frac{1}{2}(e^t-1)-e^t\cdot t+\frac{1}{2}(-e^{-t}+1)$$

$y(t)=-t\cdot e^t+c_1\cdot y_1\cdot c_2y_2+c_3y_3.$

Μη ομογενείς Γ.Δ.Ε. με Σ.Σ.

$a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = P(t) \to$ πολυώνυμο m-βαθμού

$\hookrightarrow a_n y^{(n)} + \ldots + a_k y^{(k)} = P(t)$ m-βαθμού

$\rightsquigarrow y_\mu(t) = b_m t^m + \ldots + b_1 t + b_0\ ,\quad b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{C}$

Πχ Άσκηση: Να βρεθεί μερική λύση της $y'' - 4y' + 4y = t^2$.

Λύση: $y_\mu(t) = at^2 + bt + c$.

$\Rightarrow 2a - 4(2at + b) + 4(at^2 + bt + c) = t^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4at^2 + t[-8a + 4b] + 2a - 4b + 4c = t^2$

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ -8a + 4b = 0 \\ 2a - 4b + 4c = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} a = 1/4 \\ b = 1/2 \\ c = \ldots \end{matrix}$$

Άρα, $y_\mu(t) = \frac{1}{4} t^2 + \frac{1}{2} t + c$.